

## **Le cadre didactique des domaines d'expérience pour enseigner les mathématiques dans des contextes transdisciplinaires à l'école primaire.**

Nadia Douek

IUFM de Créteil, France.

Equipe de didactique des mathématiques de Gênes, Italie.

[Ndouek@wanadoo.fr](mailto:Ndouek@wanadoo.fr)

*La didactique des domaines d'expérience organise des séquences où des situations-problèmes à contenu mathématique important sont contextualisées et où les élèves, guidés par le maître, les résolvent en mobilisant et approfondissant un ensemble varié de références, des plus pragmatiques et « quotidiennes » aux plus théoriques et « scientifiques » (dans le sens de la dialectique concept quotidien/concept scientifique de Vygotski). L'exemple d'une situation menée dans une classe d'école élémentaire à Piossasco (Italie), montrera comment un tel cadre permet la maîtrise d'une procédure mathématique complexe (la composition de transformations additives) en écho et grâce à l'analyse du phénomène de la croissance des plantes.*

L'équipe de Gênes en Italie développe des ingénieries pour gérer des projets de long terme dans le cadre didactique des domaines d'expérience. Du point de vue cognitif, ce cadre se réfère à Vygotski pour questionner le rôle du maître, le rôle de la culture commune dans les élaborations de concepts « plus scientifiques » et celui du travail langagier, et à Vergnaud pour définir la conceptualisation et estimer son progrès chez les élèves. Du point de vue culturel, ce cadre, fondé sur des analyses anthropologique, épistémologique et historique des concepts mathématiques et de leur imbrication dans divers domaines culturels et disciplinaires, permet de construire les étapes des projets et le choix des expériences qui les jalonnent et qui les mettent en résonance avec la vie extrascolaire des élèves.

La médiation du maître et l'argumentation sont très importantes dans ce cadre didactique, mais ne seront pas analysées ici.

Les domaines d'expérience sont en rapport avec la culture commune dans laquelle l'élève grandit. Les travaux en classe partent de concepts quotidiens, faciles d'accès, pour aller vers une conceptualisation plus scientifique (cf. Vygotski). Par exemple, en première année du primaire (CP), le domaine d'expérience de la monnaie et des échanges est essentiel dans la construction du nombre et de la numération. Les références aux achats, aux commerces et aux situations réelles vécues par les élèves y sont très développées et sont à l'origine de bon nombre de situations-problèmes.

Les séquences de résolution de problèmes dans la didactique des domaines d'expérience sont assez longues et structurées (voir exemple).

### **Exemple : le domaine de la culture des plantes**

En deuxième année de l'école primaire (CE1 en France), on aborde la problématique du « temps de la nature et des activités humaines », et en particulier, le cycle annuel de la culture des plantes. On crée un coin vert dans la classe en cultivant des plantes annuelles et si possible, en parallèle, on observe régulièrement des cultures qui ont lieu à l'extérieur.

La culture des plantes présente des contraintes physiques et sociales qui permettent de « monter » ce domaine d'expérience en classe de façon adaptée aux besoins d'enseignement. Ce domaine d'expérience lié à des objectifs d'enseignement des sciences, offre des opportunités pour la conceptualisation mathématique à travers des situations problèmes contextualisées et liées aux projets d'observation :

- Évaluation de durées mettant en jeu plusieurs mois (du 16 novembre au 10 janvier, par exemple). Elles demandent des stratégies de composition d'additions et de soustractions ;
- Utilisation de la règle pour mesurer des hauteurs qui dépassent sa longueur, ou qui ne sont pas accessibles directement.
- Représentations des hauteurs à l'échelle, pour rendre compte des observations sur les cahiers, et permettre de comparer des situations passées avec le présent, ou encore des réalités éloignées dans l'espace (par exemple, les plantes de la classe, et celles qu'on observe dans un champ) ;
- Analyse des formes (symétries et alternances, etc.) motivée par la nécessité de reconnaître les plantes de la même espèce à divers moments de leur croissance.
- Comparaison de hauteurs puis de croissances.

Ces situations-problèmes contextualisées recèlent systématiquement des problèmes théoriques importants. D'ailleurs, les activités directes de mesurage, de comparaison synchronique de mesures sont vite remplacées par des activités de conjecture, des projets de comparaison de mesures différées dans le temps, tout en restant longtemps des références importantes de certains éléments de raisonnement.

Dans ce domaine d'expérience, deux domaines disciplinaires, en dehors des mathématiques jouent des rôles essentiels. Les sciences, comme cadre d'analyse du phénomène de la croissance. Et la langue à travers laquelle se développent les raisonnements élaborés lors des résolutions de problèmes, surtout quand les élèves se réfèrent aux situations réelles.

### **Situation problème : comparaison des croissances de deux plantes**

Cette situation met en jeu une procédure mathématique dont le modèle est une des situations additives les plus difficiles, celle de la comparaison de transformations (cf. les catégories de G. Vergnaud). Les transformations, ici, modélisent des croissances.

A l'occasion d'observations de plantes qu'on fait pousser dans la classe dans diverses conditions, on avait posé des problèmes d'évaluation de la croissance d'une plante. Dans la séquence analysée ici, commencée le vendredi 10 décembre 99, le problème était de comparer la croissance de deux plantes entre le 3 et le 10 décembre.

Énoncé :

*« Vendredi 3 décembre la plante dans le pot qu'on a gardé en classe, à la lumière, était haute de 26 cm et celle du pot qu'on a mis à l'ombre était haute de 7 cm.*

*Aujourd'hui, vendredi 10 décembre, la plante du pot à la lumière est haute de 28 cm et celle du vase qu'on a mis à l'ombre est de 10 cm ;*

*A ton avis, laquelle des deux plantes a grandi le plus du vendredi 3 décembre à aujourd'hui ? »*

1) La séquence commence par une première séance de résolution individuelle orale. Ce sont des entretiens avec le maître (pendant que les autres élèves effectuent des tâches routinières en autonomie) aboutissant à une synthèse orale que l'élève doit ensuite écrire, en passant éventuellement par la dictée à l'adulte. En effet, les élèves écrivent, mais pas avec l'aisance qui leur permettrait de résoudre en même temps un problème complexe. Ces interactions n'aboutissent pas nécessairement à de « bonnes » résolutions. Mais par contre le maître cherche à amener tous les élèves à la compréhension du problème posé.

Lors de ces dialogues, le maître engage l'élève dans une argumentation, il le pousse à justifier ses réponses. Cela fait souvent apparaître des contradictions : les élèves s'attendaient à ce que la plante la plus haute soit celle qui ait crû le plus. La confusion entre croissance et hauteur reflète l'aspect « quotidien » de ces concepts. Il est si ancré que certains parviennent à trouver la bonne procédure calculatoire mais concluent que la plante au soleil a crû le plus. La cohérence qu'imposeraient les résultats numériques ne se transpose pas facilement au cadre « réel ». Pour que l'élève prenne conscience de telles contradictions ou erreurs (et puisse alors distinguer les concepts), le maître l'aidait à reconstituer « l'histoire » des plantes et des mesures, exploitant ainsi la référence au réel des plantes. Il a encouragé certains élèves en difficulté à faire un dessin des deux plantes côte à côte en marquant les hauteurs correspondant aux différentes dates. L'organisation schématique donnée par le dessin, met en évidence les éléments de la transformation additive correspondant à la croissance grâce à l'espace entre deux traits qui matérialise « le bout de la plante qui a crû entre les deux dates ». Ce schéma a permis de rendre visibles les significations des différentes données numériques et de les hiérarchiser, de distinguer la hauteur de la croissance. Il a facilité le lien avec le temps, et le lien avec l'addition-soustraction dans le cadre du déplacement sur la droite numérique, déjà connue. Il a donné lieu à l'argument verbal « du bout qui a crû » qui sera partagé par la classe lors de la discussion qui suivra. Certains élèves ont pu maîtriser cet objet intermédiaire à travers le travail langagier et développer la procédure numérique de calcul et la comparaison des transformations sans avoir besoin du schéma. D'autres ne sont pas parvenus à distinguer hauteur et croissance à ce moment-là

2) Dans une deuxième séance, le maître propose la photocopie des synthèses des résolutions de deux élèves suivie des questions qui engageront la discussion collective qu'il mènera pour comparer ces deux résolutions.

SYNTHÈSE DE JESSICA :
-----------------------

Celle à l'ombre a crû le plus parce qu'elle a crû de 3cm par contre celle au chaud a crû de 2cm. Je dis que celle à l'ombre a crû le plus parce que les centimètres de la partie de la plante qui a crû sont de plus.

#### SYNTHÈSE DE GIUSEPPE :

La plante qui a crû le plus depuis vendredi 3 décembre est celle à l'ombre, parce qu'elle a crû de 3centimètres alors que celle au chaud a crû de 2centimètres et alors 3 c'est plus que 2. Mais en vérité la plante la plus haute et celle de 28centimètres et c'est celle du chaud.

#### Questions :

- 1) Sur quoi Giuseppe et Jessica ont-ils raisonné de façons semblables ?
- 2) Dans le texte de Giuseppe, il y a un argument que nous ne trouvons pas dans le texte de Jessica. Lequel est-ce ?

Ce dispositif (photocopies, comparaisons puis discussions) introduit les élèves aux productions de leurs pairs dans de « bonnes conditions », avant la discussion collective où les voix se multiplient, et les difficultés d'expression s'ajoutent. Il permet aussi de prendre le temps de faire partager des procédures avant de les discuter.

Dans la discussion, des confusions entre hauteur et croissance réapparaissent, même chez des élèves qui étaient parvenus à les distinguer auparavant. Pour dépasser cette confusion, les données ont été interprétées collectivement en référence aux plantes et aux données numériques et l'on a reparlé du « bout de plante qui a crû ». Les élèves ont été ensuite engagés dans une réflexion métacognitive à propos de la production de leurs camarades et de leurs raisonnements et ont interprété les phrases, les données, ce que signifie croissance, hauteur, et le rapport au temps.

3) La troisième et dernière séance est consacrée à la production d'un texte individuel écrit de synthèse en répondant à la question : « *Est-ce la même chose de dire quelle plante a crû le plus ou de dire quelle plante est la plus haute ? Pourquoi ?* »

A ce moment, les élèves pouvaient produire des textes argumentatifs, avec leurs propres mots. Les séances précédentes leur ont fourni des procédures et des arguments pour les justifier et ont mis en place des expressions verbales adaptées. Cette question pose indirectement celle de différencier une transformation additive d'une comparaison de transformation, étape importante dans la maîtrise des procédures additive et de la conceptualisation de l'addition.

Le problème contextualisé, lié à ces plantes-là, était devenu trivial. A cette question générale, les élèves ont pu répondre de façon décontextualisée, ou parfois recontextualisée autrement ou encore avec des exemples génériques inventés. La plupart ont su se référer au temps qui différencie fondamentalement hauteur et croissance.

La généralisation fait partie de la conceptualisation, je prends à mon compte le point de vue de Vygotski : « *la généralisation signifie donc à la fois prise de conscience et systématisation des concepts* »<sup>1</sup>.

Parmi les 19 élèves de la classe, dans leurs synthèses individuelles écrites de la fin de la séquence 12 ont répondu dans une sorte de généralisation, 14 font référence au temps pour expliquer la croissance, 4 ont peu ou pas fait évoluer leur distinction entre hauteur et croissance ou leur procédure de résolution du problème entre le début de la séquence et la fin.

### **Rôle du domaine d'expérience dans la conceptualisation mathématique**

Le concept de croissance est complexe, il se réfère à un phénomène dynamique, mais il est représenté avec les mêmes moyens symboliques et schématiques que les concepts statiques. Et cette complexité-là est en résonance avec celle de la comparaison des transformations.

Du point de vue cognitif, la comparaison de transformations contextualisée dans une situation de croissance rend cette situation additive significative et accessible, car la référence à l'expérience des élèves, bien développée par le cadre didactique, est possible. En même temps, l'élaboration de la signification de la croissance passe par un effort de mathématisation de ce concept. Elle est indispensable pour résoudre le problème et elle est facilitée par le cadre numérique déjà assez élaboré en deuxième année, offrant donc un appui aux élèves. La nécessité de comparer les croissances problématise ce concept. En conséquence, on le situe par rapport à d'autres concepts (la hauteur) et à la représentation des nombres sur la droite numérique. Cela donne des accès au sens et aux significations de ce concept tout en donnant corps à la procédure de comparaison de transformation qui résout le problème.

Les mouvements entre référence aux situations réelles et représentations symboliques, schématiques et verbales, caractérise les moments d'interprétation du problème ou des solutions. Ils sont provoqués par l'argumentation que le maître instaure tant dans ses interactions individuelles que par sa gestion de la discussion collective, et sont essentiels dans la conceptualisation de la croissance et de la situation additive.

Voyons maintenant la spécificité de ce domaine d'expérience-là en comparant le contenu sémantique de cette procédure dans le contexte de la croissance des plantes avec la même procédure dans une situation cardinale (comme de gain et de perte de billes : Par exemple le problème « le 3 décembre, j'avais 26 billes et ma copine en avait 7. Le 10 décembre, j'en ai 28 et ma copine en a 10 ; qui de nous deux en a gagné le plus ? »).

La complexité de la situation des plantes due à la confusion probable entre hauteur et croissance, et sa richesse, du fait d'allier dynamique et statique, n'ont pas d'équivalents dans la situation des billes. Elles obligent les élèves à approfondir le sens de la croissance, à maintenir et développer le contenu sémantique des opérations, à différencier la croissance de la hauteur et à lui attribuer le caractère dynamique. C'est bien ce qui permet de transférer ces élaborations et la cohérence engendrée aux objets mathématiques qui interviennent dans la résolution du problème, de hiérarchiser les opérations et de maîtriser une représentation schématique

---

<sup>1</sup> Pensée et Langage, p319

efficace. En particulier, d'enrichir la transformation additive d'un caractère dynamique et représentable de façon statique, et donc " maniable ".

### **Conclusion**

Le travail dans les domaines d'expérience offre des éléments qui ont été essentiels à la résolution du problème et à la conceptualisation de la croissance et de la situation additive :

- La référence à la situation réelle, rendue familière par le travail régulier d'observation dans le domaine d'expérience, offre un appui sémantique pour interpréter les données numériques et hiérarchiser leurs rôles.
- Les caractères statiques et dynamiques de la situation qui permettront de différencier le traitement des transformations de celui de la comparaison.
- La spatialisation de la croissance qui a lieu (verbalement et schématiquement) permet une représentation statique de la croissance tout en conservant sa signification. Elle la rend donc maîtrisable dans une procédure, et rend significatifs les outils que sont la droite numérique et les écarts qu'on y inscrit.

Ces éléments reflètent des aspects de la conceptualisation<sup>2</sup> des situations additives : situations de référence enrichies (statique et dynamique) ; représentations (schématique, verbale et numérique) ; invariant opératoire (comparaison de transformation) ; liens systémiques entre positions sur la droite graduée, écarts, comparaison d'écarts, rapport entre les aspects statiques et dynamiques des concepts; maîtrise consciente et volontaire des procédures calculatoires, de la représentation schématique et généralisation de la procédure du fait de sa décontextualisation.

Quelques problèmes me semblent importants à approfondir :

Le double rôle de la modélisation dans la conceptualisation en mathématiques et en sciences.

Dans la ligne de la définition des concepts de Vergnaud, le rôle fondamental des situations transdisciplinaires comme source de situations de référence des concepts mathématiques.

Boero, P.: 1994, 'Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11', in L. Bazzini & H.G. Steiner (Eds.), *Proceedings of the Second Italian German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*, IDM Bielefeld, pp. 45-62.

Boero, P. : 1994bis, 'Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives théoriques', en M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavinot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, pp. 17-50, La Pensée Sauvage, Grenoble

---

<sup>2</sup> En référence à une description de la conceptualisation adaptée aux situations scolaires, élaborée à partir de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et des élaborations théoriques de Vygotski à propos de la dialectique concepts quotidiens / concepts scientifique (cf. thèse)

- Boero, P.; Dapueto, C.; Ferrari, P.; Ferrero, E.; Garuti, R.; Lemut, E.; Parenti, L.; Scali, E.: 1995, 'Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School', *Proc. of PME-XIX*, Recife, vol. 1, pp. 151-166.
- Douek, N.: 1999b, 'Argumentation and conceptualisation in context: a case study on sun shadows in primary school', *Educational Studies in Mathematics*, 39, 89-110.
- Douek, N.; Scali, E.: 2000, 'About Argumentation and Conceptualisation', *Proceedings of PME-XXIV*, Hiroshima, vol. 2, pp. 249-256.
- Lakoff, G. and Nunez, R.: 1997, 'The Metaphorical Structure of Mathematics', in L. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, pp. 21-89, L.E.A., Hillsdale
- Radford, L.: 2001, Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra, in: *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Marja van den Huevel-Panhuizen (ed.), Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol.4, pp.81-88
- Scali, E.: 1994: 'Le rôle du dessin dans la modélisation géométrique élémentaire des phénomènes astronomiques' ; *Actes de la CIEAEM- 46*, Toulouse.
- Scali, E.: 1997, 'Choix des taches et organisation des interactions dans la classe pour l'appropriation des signes de la géométrie', *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal, pp. 186-194
- Vergnaud, G.: 1990, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.
- Vergnaud, G.: 1998, 'A comprehensive theory of representation for mathematics education', *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 167-181.
- Vergnaud, G.: 2000, *De Revault d'allonnes à une théorie du schème aujourd'hui*, Psychologie Française n°45-1 2000, 35-50.
- Vygotsky, L. S.: 1985, *Pensée et langage*, Editions Sociales, Paris.