L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Vers une modélisation des stratégies probabilistes au secondaire

Omar Bouteglifine, *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques à Agadir (CREMA), Maroc*

Résumé

Le présent travail fait suite à une récente étude au cours de laquelle nous avons observé les stratégies de 40 professeurs d'enseignement secondaire à l'Académie d'Agadir et les stratégies de 229 élèves de ces enseignants en terminales sciences et lettres. Le résultat de l'étude dont le chiffre n'est pas l'objet de cet article est renforcé par une littérature dans le domaine à la première partie, pour tenter d'offrir une approche structurale-procédurale de l'enseignement et apprentissage des probabilités au secondaire.

La deuxième partie définit la stratégie pour le calcul probabiliste et son fonctionnement comme nous l'avons fait dans notre étude empirique ; il introduit les notions originales de « pré-probabilité » et d'« unité stratégique » qui nous ont beaucoup aidé à schématiser la stratégie probabiliste.

Les enseignants qui ont pris connaissance du modèle l'ont apprécié comme outil d'analyse de stratégies d'élèves et les élèves auxquels on a enseigné cette approche ont adopté des méthodes de résolution relativement fiables où l'échec a considérablement baissé.

Une série de tests desquels sont extraits les exemples présentés ont été réalisés dans deux groupes (expérimental et témoin). L'analyse factorielle, la similarité, l'analyse implicative et les tests de comparaison ont tous montré l'efficacité du modèle en établissant la relation entre l'enseignement par cette approche et les résultats obtenus par les élèves.

1. Structures et procédures d'une stratégie probabiliste

1.1. Définition préliminaire d'une stratégie probabiliste

Dans un premier temps, nous définissons la stratégie probabiliste comme étant, d'une part, une description complète de la manière dont devrait se comporter l'élève ou l'enseignant dans une situation de probabilité et, d'autre part, comme un art de combiner les éléments nécessaires en vue de la réussite dans la tâche à accomplir.

On distingue les stratégies probabilistes chez les enseignants de cette matière, et qu'on appelle des stratégies pédagogiques, de celles pratiquées par les élèves en probabilités et sur lesquelles nous mettons plus l'accent dans ce texte.

La stratégie pédagogique intervient du côté de l'organisation de l'enseignement et l'apprentissage. Elle consiste à présenter le concept de probabilité sur la base des ressources existantes en faisant un choix didactique parmi tant d'autres, à prendre connaissance des modèles mathématiques dans la limite du programme enseigné. La stratégie pédagogique est une action essentielle dans l'édification des stratégies d'apprentissage et de performance chez les élèves. C'est elle qui attire l'attention de l'élève, le motive, lui apprend les méthodes de travail et favorise en lui l'évocation.

Une stratégie d'apprentissage est la manière dont l'élève gère son apprentissage. De telles stratégies se déploient dans les situations où apprend les probabilités, elles se réalisent par l'apprenant dans le sens du procédural au structural par le biais d'activités visant essentiellement l'instauration de modèles pour diverses situations que l'on rencontre fréquemment. Elles sont en lien direct avec les stratégies pédagogiques puisque ce sont ces dernières qui les orientent.

Une stratégie de performance est celle que l'individu met en œuvre face à un problème. Elle peut avoir lieu après un certain nombre de stratégies d'apprentissage et consiste aussi à structurer des situations mais souvent dans le cadre d'une évaluation des précédentes. La structuration dans ce cas consiste à faire appel aux structures existantes pour entamer des procédures, il s'agit donc de la recherche d'un modèle parmi ceux qui sont déjà structurés dans la mémoire et qui répondent à la situation problème. La stratégie d'apprentissage et la stratégie de performance ont une même direction mais elles ont des sens inverses puisque la première se fait des procédures aux structures et la seconde part des structures pour montrer la performance en appliquant des procédures.

1.2. Les structures probabilistes

Une structure probabiliste est un ensemble de concepts qui servent de base à la construction du concept de probabilité. Cet ensemble peut être doté d'opérations intervenant dans les procédures de calcul de probabilités. Elle peut être un cumul de concepts précis ou vagues qui peut aider, ou nuire à l'évolution de l'apprentissage de cette matière. Ceci nous conduit à distinguer deux sortes de structures probabilistes : objectives et subjectives.

1.3. Les structures objectives (SO)

Ce sont des objets mathématiques matérialisés ou symbolisés dans lesquels les opérations algébriques sont possibles. Elles réunissent des opérateurs qui caractérisent l'expression de la fonction de probabilité et des champs d'application pour ces opérateurs que nous appelons des cadres. C'est sur la base de ces structures que l'on peut construire des modèles auxquels se réfèrent les stratégies probabilistes.

– Exemples

Une structure ensembliste peut être déterminée par la donnée d'un ensemble E (fini ou dénombrable selon les programmes du secondaire), des opérations sur les parties de E comme l'intersection, la réunion,… , qui lui donnent la structure d'algèbre (algèbre de Boule $(P(E),\cap,\cup, C_E)$) et d'une pré-probabilité[1] comme le cardinal « card » qui permet de calculer la probabilité d'un événement. Une telle structure est donc représentée par $(P(E),\cap,\cup, C_E,\text{card})$. Ainsi, dans le cas d'équiprobabilité on peut écrire que la probabilité d'un événement représenté par un ensemble A est $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$ lorsque E est l'ensemble des issues possibles lors d'une expérience aléatoire.

1 Voir deuxième partie.

Une structure statistique peut être déterminée par la donnée d'une population statistique P et des variables qualitatives ou quantitatives caractérisant ses individus. Des procédures internes comme la conjonction ou la disjonction des variables caractérisent des échantillons (parties de la population P). Une telle structure est représentée par (S, traitement des variables, effectif) où S est l'ensemble des échantillons. Tout dépend de la façon dont on a constitué l'échantillon. Si par exemple on cite un individu au hasard dans la liste des individus de toute la population, la probabilité qu'il appartienne à un échantillon particulier est :

$p = \dfrac{\text{Taille de l'échantillon}}{\text{l'effectif total de la population}}$. D'autres pré-probabilités en statistiques comme le pourcentage ou la fréquence permettent d'estimer la probabilité comme c'est le cas dans le modèle fréquentiste.

Une Structure géométrique peut être donnée par l'ensemble G des figures d'un espace de dimension n, des procédures géométriques qui consistent aux manipulations des figures et d'une ou plusieurs pré-probabilités comme la distance, l'aire ou le volume.

1.4. Les structures subjectives (SS)

Elles regroupent toutes les conceptions de l'individu vis-à-vis des concepts de probabilités et de ceux qui sont en relation avec ce domaine. Nous pouvons définir les structures subjectives comme l'ensemble des images mentales des structures objectives et des conceptions sur les réels manipulés en probabilités chez l'individu. Les SS sont imaginaires et individualisées, c'est ce qui explique la différence des performances des élèves selon qu'on en fait ou non une bonne image. Elles se réfèrent à des conceptions spontanées, liées à l'intuition de l'individu et à son expérience personnelle. C'est dans ces structures que nous pouvons classer, par exemple, toutes les croyances relatives au hasard chez l'individu et à l'estimation subjective de la probabilité.

Certaines distorsions entre les SS et les SO trouvent leurs explications dans les procédures appliquées, le tableau suivant donne quelques exemples.

Cadre	Structure objective	Structure subjective	Explication
Ensemble	$Card(A \cup B)=card(A)+card(B)-card(A \cap B)$	$Card(A \cup B)=card(A)+Card(B)$.	Confusion entre le cas de deux ensembles disjoints et celui de deux ensembles quelconques
Statistique	La fréquence des hommes dans une population d'hommes et de femmes et $\frac{\text{effectif des hommes}}{\text{effectif total des hommes et femmes}}$	Cette fréquence est 1/2	L'absence des donnés réelles laisse place à la conception d'égalité des chances des deux sexes.
Probabilité	Dans 5 lancers successifs d'une pièce de monnaie normale toutes les possibilités sont équiprobables	PFPFFP est plus probable que FFFFF	Cette erreur provient de la conception que le hasard «régularise» les éventualités.
Géométrie	Un point est projeté au hasard sur le carré défini par $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé, la probabilité d'avoir $x<y$ est 1/2.	Cette probabilité est 1/3	La partition du plan (ou du carré) en trois ensemble $\{(x,y)/x<y\}$, $\{(x,y)/x=y\}$, $\{(x,y)/x>y\}$ peut être à l'origine de 1/3

1.5 Les procédures probabilistes

À propos des procédures, Guy Noël résume

- *Une procédure est une succession d'actions réalisées en vue d'obtenir un résultat (une sortie) à partir de données (des entrées).*
- *Une procédure a un caractère dynamique : son déroulement a une dimension temporelle.*
- *Plusieurs procédures peuvent être enchaînées, permettant ainsi la construction de procédures complexes à partir de procédures élémentaires.*
- *Une procédure peut, soit introduire par construction un nouvel objet : le compactage fait apparaître les nombres naturels, soit se transformer elle-même en un nouvel objet : la fraction, la transformation géométrique, l'équation* […]

Les procédures probabilistes ont les mêmes caractéristiques mentionnées ci-dessus. Elles peuvent opérer dans un ou plusieurs cadres et utiliser une ou plusieurs expressions de la fonction de probabilité. Entre la réalité et la théorie des procédures se placent comme la modélisation, la simulation.

Comme pour les structures, il est possible de distinguer les procédures objectives (comme elles doivent être appliquées) et les procédures subjectives (comme chacun les applique).

La modélisation et la simulation sont deux procédures importantes en probabilités.

2. Stratégies pour le calcul probabiliste et fonctionnement

Les enseignants utilisent des SO avec leurs conceptions SS pour instaurer les structures probabilistes SP des élèves. Les élèves partent des SO enseignées par les professeurs éventuellement influencées et modifiées par certaines pratiques didactiques, et des SS déjà existantes accompagnant leurs connaissances pour former de nouvelles SS comme leurs structures probabilistes. Aussi bien pour les élèves que pour les enseignants, le passage d'une structure à une autre nécessite des procédures.

2. 1 Unité stratégique

2. 1.1 Rappels et compléments sur les expressions probabilistes

Une structure (SO ou SS) de base (S_b) est, rappelons-le, formée d'un cadre (C), des procédures internes liées au cadre (PI) et d'une ou plusieurs pré-probabilités qui sont des procédures de mesure permettant de passer à l'expression de la probabilité comme un outil d'estimation de celle-ci (PR). Une telle structure peut être notée : S_b=(C, PI, PR).

Une structure probabiliste Sp est composée du cadre (CB) de la structure de base S_b probabilisé, des procédures probabilistes liées à la base (PB), et d'une expression de probabilité (EP), on peut la représenter par S_p =(CB, PB, EP). Ainsi les structures de bases engendrent les structures probabilistes.

2.1.2 Pré-probabilité

Une pré-probabilité est une mesure, une application vers IR ou un paramètre dans la structure de base, elle permet de définir l'expression de la probabilité dans une autre structure que la structure de base. La situation de départ offre les ingrédients qui favorisent l'apparition d'une pré-probabilité par intuition, reconnaissance des conditions ou après la structuration du problème par des procédures comme la schématisation et la modélisation.

Nous distinguons les pré-probabilités qui ne sont pas déjà des probabilités de celles qui le sont. Une pré-probabilité qui n'est pas une probabilité sera appelée « pré-probabilité primaire », une probabilité utilisée dans une loi sera dite « pré-probabilité loyale » et une probabilité utilisée dans un algorithme comme celui de la probabilité conditionnelle sera appelée « pré-probabilité conditionnelle ».

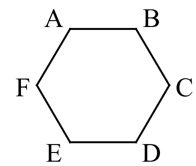
2.1.3 Pré-probabilité primaire

La mesure mise en évidence est attachée au cadre et au contexte du problème.

Dans un cadre, plusieurs pré-probabilités peuvent être envisagées : par exemple en géométrie, il y a des situations où l'on fait appel au cardinal et d'autres où l'on fait appel à la distance, l'aire, ou le volume.

– Exemple 1

Une urne contient six jetons portant les lettres A, B, C, D, E et F. Ces six jetons sont également les sommets de l'hexagone ci-contre



On tire simultanément trois jetons de l'urne au hasard

Calculer la probabilité d'avoir un triangle isocèle et non équilatéral.

Le contexte est géométrique dans un modèle d'urne. Ici, la distance n'a pour rôle que la reconnaissance de l'événement et non le calcul de sa probabilité. Le modèle d'urne offre le cardinal pour remédier à la situation.

– Exemple 2 – Exercice n° 27 P267 – MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, Manuel de mathématiques, 3e Sciences expérimentales, Librairie des écoles Casablanca, 1996.

On considère un entier naturel non nul n. On pose $In = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$

On considère l'ensemble G={1,2,3,4,5,6} et l'application : p : G $\rightarrow$ IR

$$k \rightarrow \alpha \bullet k^2 I_k$$

Quelle est la valeur de α pour que p soit une probabilité sur G ?

Ici on cherche à définir la probabilité p sur G à partir de la pré-probabilité I_k qui est une application de IN vers IR.

Le tableau suivant donne quelques pré-probabilités primaires usuelles

Cadre ou contexte	Pré-probabilité
Ensemble	Card
Géométrie	Distance, aire, volume,…
Statistique	Effectif, fréquence, pourcentage, poids, taille,…
Analyse	Fonction, paramètre, …

2.1.4. Pré probabilité loyale

Cette pré probabilité est destinée à une utilisation dans une loi, il peut être une probabilité ou un paramètre caractérisant la probabilité ou encore une densité de probabilité.

– Exemples

1) La probabilité p=1-q de l'expression $p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où X suit la loi binomiale de paramètre (n,p) est dite pré-probabilité binomiale.
2) Le paramètre λ de la loi de Poisson peut être considéré comme une pré-probabilité de Poisson.
3) La densité de probabilité d'une variable continue est une pré-probabilité liée à la loi de cette variable.

2.1.5. Pré probabilité conditionnelle

La définition de la probabilité conditionnelle se fait dans un espace probabilisé (Ω, p) par $p'(A) = p_B(A) = p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ où B est un événement fixé de probabilité non nulle. La probabilité p est considérée comme pré-probabilité dans la structure de base (Ω,p) qui définit l'expression de la probabilité dans l'une des deux structures (Ω, p') et (B, p") telles que : $p'(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ et $p''(A') = \dfrac{p(A')}{p(B)}$ où A" est la trace de A sur B (c.à.d : A" = A$\cap$B).

– Commentaire

La probabilité définie sur un espace probabilisé peut être une pré-probabilité pour le calcul des probabilités des événements résultant des procédures qui transforment le cadre des événements comme le cas de la probabilité conditionnelle. Cette transformation consiste au passage de la structure de base à la structure probabiliste comme le passage :

- de (P(E),$\cap$,$\cup$, C_E,card) à la structure probabiliste correspondante.
- de la structure de la probabilité définie sur P(Ω) à la structure de la probabilité conditionnelle,
- de la structure de la probabilité à la probabilité image par une variable aléatoire.

La notion de pré-probabilité et d'expression de la probabilité d'un événement mettent un cadre au transfert de la probabilité à la loi de probabilité d'une variable aléatoire ou d'une probabilité à une procédure complexe comme la probabilité conditionnelle.

2.2 Situation de départ et situation d'arrivée

Nous convenons d'appeler « situation de départ » ou S_d la phase où a lieu une expérience aléatoire ou une épreuve ou toute autre question posée au départ visant un calcul de probabilité, c'est la phase du contexte où il faut tenir compte des conditions et des contraintes desquelles dépendent les structures. La formulation de l'événement se fait dans le contexte et des procédures comme le dénombrement ou la schématisation rentrent parfois dans la structuration pour déterminer les composantes d'un événement. Une fois cette étape achevée, on se trouve dans la structure de base où le contexte du cadre peut être différent de celui de la situation de départ. La situation de départ peut intervenir dans l'expression probabiliste et offre un moyen de le définir avant même de se situer dans la structure de base. Par exemple, dans une situation où des épreuves indépendantes et identiques sont répétées et où un événement E peut être réalisé dans chacune de ces épreuves avec une probabilité p, la probabilité d'un événement F, caractérisé par la réalisation de E un certain nombre de fois inférieur ou égal au nombre de répétitions de l'épreuve, est donnée par la loi binomiale.

De même on appellera « situation d'arrivée » ou S_a la phase où se passe l'opération probabiliste avec laquelle on répond à la question posée dans S_d, dans cette phase on reprend le contexte de S_d sans lequel la solution trouvée n'aura peut-être pas de sens.

2.3 *Procédures internes et procédures externes*

Une procédure interne opère à l'intérieur d'une structure et s'attache à l'essence de cette structure. Les procédures agissent parfois comme des lois de composition internes dans une structure et parfois comme des algorithmes qui se pratiquent habituellement dans le cadre considéré. Toute procédure qui lie deux structures différentes ou encore une structure et une situation étrangère à la structure s'appellera procédure externe.

– Exemples

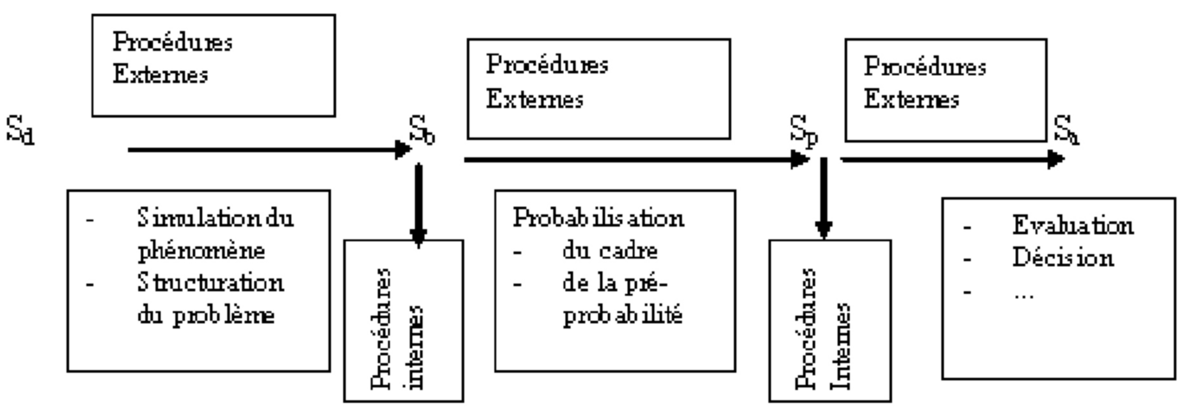
Procédures internes :

- L'intersection et la réunion des ensembles dans une structure ensembliste.
- L'intersection et la réunion des événements dans une structure probabiliste.
- Les lois de probabilité et le traitement des variables aléatoires dans une structure probabiliste.
- L'échantillonnage, les traitements des caractères et des tableaux d'effectifs dans une structure en statistique.
- Les combinaisons, les arrangements, le dénombrement des applications dans une structure combinatoire.
- Le pavage en géométrie.
- L'intégration en analyse.

Procédures externes :

- La modélisation, se fait entre une expérience aléatoire et une structure.
- La simulation se fait entre un phénomène réel et un phénomène artificiel.
- La structuration se fait entre une situation-problème et une structure.
- La probabilisation se fait entre une structure de base et une structure probabiliste.

Le schéma qui suit illustre ces positions.



La modélisation est perçue dans ce schéma comme une procédure allant de S_d à S_p groupant ainsi la simulation du phénomène (ou structuration du problème), détermination du cadre puis sa probabilisation, détermination de la pré-probabilité et sa probabilisation. La probabilisation du cadre est le passage du cadre de base à un cadre similaire en probabilité, autrement dit, il s'agit de munir le cadre d'une probabilité. La probabilisation de la pré-probabilité est l'expression de la probabilité à partir de la pré-probabilité considérée dans la structure de base.

– Exemples

Dans le cadre statistique, on peut définir la pré-probabilité « fréquence », qui estime la probabilité lors d'un assez grand nombre de répétitions d'une épreuve où un événement peut apparaître. Une fois cette probabilité établie, nous avons alors probabilisé le cadre et la pré-probabilité et nous passons alors d'une structure de base statistique à une structure probabiliste. Ainsi, nous avons effectué une procédure externe : la probabilisation.

Dans le cadre géométrique, on peut définir la pré-probabilité « aire » qui définit la probabilité en posant $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{aire(A)}}{\text{aire(S)}}$ où S est le secteur total considéré dans un plan et A la partie de S sur laquelle on cherche à se positionner. Le passage de l'aire à la probabilité est une procédure externe qui fait partie de la probabilisation, elle-même fait partie de la modélisation.

Le schéma ci-dessous résume le parcours d'une unité stratégique pour le calcul probabiliste.

$$S_d \longrightarrow S_b \longrightarrow S_p \longrightarrow S_a$$

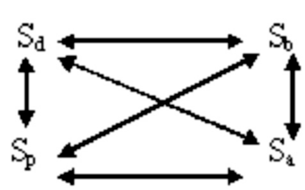
2.4 Notion d'unité stratégique

La situation de départ est l'ensemble de renseignements qui permettent d'agencer la problématique. C'est à partir de ces renseignements qu'on choisit une structure de base pour la structure probabiliste sur laquelle tout le travail de calcul de la probabilité de l'événement formulé sera fait.

Définition
Une unité stratégique est une procédure qui met en jeu la situation de départ S_d, la structure de base définie S_b, la structure probabiliste associée S_p et la situation d'arrivée S_a, pour calculer la probabilité de l'événement formulé à la situation de départ.

Une unité stratégique consiste à la détermination d'une seule structure de base (un cadre bien défini et une seule pré-probabilité) pour le calcul de la probabilité d'un seul événement.

Dans une unité stratégique, les différentes situations mises en jeu peuvent être en interaction dans tous les sens comme l'indique le schéma suivant :



– Commentaire

Le processus stratégique est une interaction dans un système formé des situations, structures et procédures. C'est dans ce processus que la stratégie se trace, se construit et s'exécute.

La segmentation en unités stratégiques joue un rôle essentiel dans la détermination d'éventuelles erreurs qui apparaissent dans les rédactions des élèves et leur traitement d'une façon « chirurgicale ».

En l'absence d'une étude approfondie des unités stratégiques, il est difficile de savoir quelque chose de précis sur les conceptions et les comportements des élèves.

– Quelques propriétés

Les situations de départ et d'arrivée dans une unité stratégique peuvent être dans une structure de base ou même dans une structure de probabilité. Dans ce cas, ces situations peuvent être gérées par des procédures internes.

Exemple

On donne la distribution suivante.

Xi	2	4	6	8
Pi	0,11	0,51	0,2	0,18

Calculer $p(X \leq 5)$.

Ici nous sommes dans une situation de départ qui est déjà dans une structure probabiliste, il ne reste qu'à appliquer une procédure interne comme : $p(X \leq 5) = p(2) + p(4) = 0.62$ et on est dans la situation d'arrivée puisqu'on a répondu à la question posée.

Dans une unité stratégique, une structure de probabilité peut avoir comme structure de base une autre structure de probabilité.

Exemple

Une structure de la probabilité conditionnelle se base sur celle de la probabilité définie sur $P(\Omega)$.

Une situation de départ peut donner naissance à plusieurs structures de base, mais une seule peut être considérée dans une unité stratégique.

Exemple

Un tirage simultané des boules d'une urne peut être simulé par un tirage successif sans remise, bien qu'on puisse être dans un cadre ensembliste (ou combinatoire) pour les deux cas, les procédures de la pré-probabilité ne seront pas les mêmes dans les deux cas (combinaisons pour l'un et arrangement pour l'autre).

Une unité stratégique peut utiliser un distributeur de pré-probabilité ou de probabilité comme l'arbre ou le tableau, on s'intéressera dans ce cas au pré-registre ou au registre qui distribue la probabilité.

3. Définition d'une stratégie pour le calcul probabiliste et propriétés

3.1 Définition

Une stratégie de calcul de la probabilité d'un événement est une procédure qui met en jeu, en série ou en parallèle, une ou plusieurs unités stratégiques.

3.2 Quelques propriétés

- La situation d'arrivée d'une unité stratégique peut être la situation de départ d'une autre unité.
- Une stratégie probabiliste peut engager un nombre fini ou dénombrable d'unités stratégiques.
- Une erreur éventuelle dans une stratégie probabiliste ne peut se produire qu'à l'intérieur d'une unité stratégique (les connexions des unités correspondent aux intersections des unités, voir commentaire ci-dessus).

3.3 Application à certains types de problèmes en classe

A1) D'une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher, on tire successivement une par une deux boules sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche et une boule noire ?

La situation de départ est l'énoncé du problème.

La simulation permet de se placer dans un cadre pour structurer la situation. On a plusieurs choix.

– 1er Choix – Considérer une stratégie de deux unités stratégiques

Première unité

1) Situation de départ : tirage d'une boule de l'urne.

2) Structure de base : ensembliste.

Cadre : un ensemble E= {b1, b2, n1, n2, n3}.

Pré-probabilité : le cardinal.

Procédures internes : procédures habituelles sur les ensembles.

3) Structure probabiliste.

Cadre : ensembliste.

Expression probabiliste : ensembliste cardinaliste $\left(p(X) = \frac{\text{card(X)}}{\text{card(E)}}\right)$.

Procédures probabilistes ensemblistes.

4) Phase finale : exécution des procédures internes.

Soient les événements B : « avoir une boule blanche » et N : « avoir une boule noire ».

B= {b1, b2} et N= {n1, n2, n3}

$$p(B) = \frac{\text{card(B)}}{\text{card(E)}} = \frac{2}{5} \text{ et } p(N) = \frac{\text{card(N)}}{\text{card(E)}} = \frac{3}{5}$$

Deuxième unité

1) Situation de départ : situation finale précédente.

2) Structure de base.

Cadre : schématiste.

Pré-registre : arbre.

Procédures internes : procédures habituelles sur les arbres.

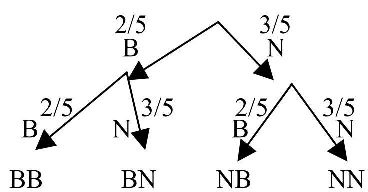
3) Structure probabiliste.

Cadre : schématiste.

Registre : arbre.

Procédures probabilistes des arbres.

4) Application.



L'événement considéré est A= {BN, NB}, il est formé de deux chemins BN et NB, or l'une des procédures probabilistes des arbres est : la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin, d'où : p(BN)=p(NB)=2/5.3/5=6/25.

La procédure probabiliste qui donne la probabilité de l'événement est : « la probabilité d'un événement formé de plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de ces chemins » d'où :

p (A)= 6/25+6/25=12/25.

Fin de la stratégie du premier choix.

– **Deuxième choix** – Considérer une seule structure ensembliste de base

1) Situation de départ : considérer tous les cas.

2) Structure de base

E={(b1,b1),(b1,b2),(b1,,n1),{b1,n2},(b1,n3},(b2,b1},(b2,b2),(b2,n1},(b2,n2},(b2,n3), (n1,b1), (n1,b2),(n1,n1),(n1,n2),(n1,n3),(n2,b1),(n2,b2),(n2,n1),(n2,n2),(n2,n3),(n3,b1), (n3,b2),(n3,n1, (n3,n2)(n3,n3)}.

Pré-probabilité : card.

Procédures internes ensemblistes.

3) Structure probabiliste.

Cadre : ensembliste.

Expression probabiliste : ensembliste cardinaliste ($p(X) = \dfrac{\text{card(X)}}{\text{card(E)}}$).

Procédures probabilistes ensemblistes.

4) Applications.

L'événement considéré est

A={(b1,,n1),(b1,n2),(b1,n3},(b2,n1},(b2,n2},(b2,n3),(n1,b1),(n1,b2),(n2,b1),(n2,b2), (n3,b1),(n3,b2)}

$$p(A) = \frac{\text{card(A)}}{\text{card(E)}} = \frac{12}{25}$$

1) Situation de départ :

A2) On suppose qu'un sujet, venant consulter dans un service hospitalier donné, a la probabilité 0.30 d'être atteint d'une maladie difficile à diagnostiquer.

Chaque sujet subit un test. On sait que :

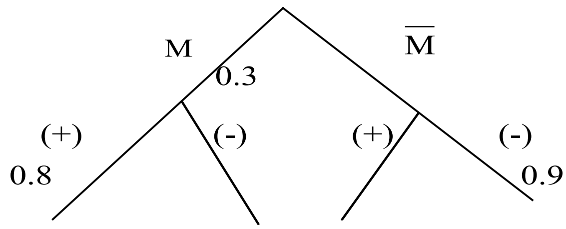
- si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative ;
- s'il est malade, 8 fois sur 10 la réponse est positive.

Quelle est la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test ?

Cette question nécessite une seule unité stratégique.

La situation de départ – Cette situation offre trois renseignements utiles : la probabilité d'être atteint d'une maladie, la probabilité d'avoir un test négatif lorsque la personne n'est pas malade, et la probabilité d'avoir un test positif lorsque la personne est malade.

Arbre 1



2) Structure de base.

Cadre : schématiste.

Pré-registre : arbre1.

Procédures internes des arbres.

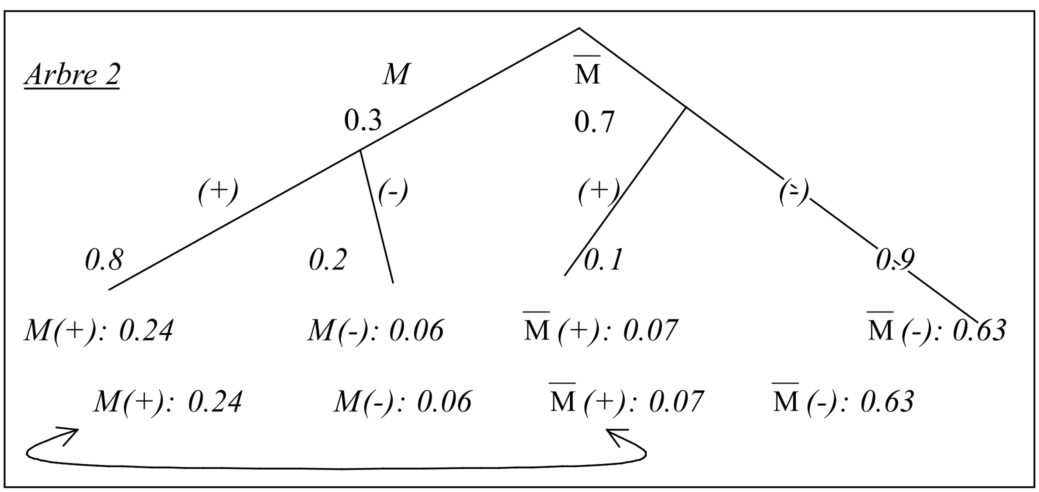
3) Structure probabiliste.

Cadre : schématiste.

Registre : arbre 2.

Procédures probabilistes de l'arbre.

4) Applications.



La probabilité demandée est p= 0.24+0.07=0.31.

Fin de l'unité stratégique.

Conclusion

Tous les auteurs de la littérature sur la résolution de problèmes s'accordent sur la nécessité d'une stratégie de résolution fiable et économique. La stratégie en probabilités s'inscrit dans le besoin énorme de structurer les notions et les méthodes en usage au calcul probabiliste. La stratégie probabiliste elle-même serait ambiguë si elle n'est pas bien étudiée en partie et en totalité comme une entité organisée pour réaliser une tâche dans un problème de probabilités. La notion d'unité stratégique permet de scruter, visualiser les particules et contrôler leurs interactions dans une stratégie globale. L'unité stratégique a l'avantage de pouvoir détecter les sources d'erreurs en probabilités soit à l'intérieure d'une structure soit dans les « synapses » qui représentent les procédures.

Références

BATAIL M. (1991) « Méthodologie » Module M4 (ED 3004) Licence en science de l'éducation, Toulouse-Le Mirail.

BOUCHER C. (1973) « Jeux de simulation » (Sherbrooke, Québec, Canada) bull 287 de L'APMEP France.

BOUTEGLIFINE O. (1999) « Stratégies probabilistes » Université de Mons-Hainaut.

BROUSSEAU Guy, (1993) « Stratégies de l'analyse statistique », Laboratoire Aquitain de didactique des sciences et des Techniques Université Bordeaux 1.

Commission inter-IREM Statistiques et probabilités, (Juin 1997) « Enseigner les probabilités au lycée », Édition IREM de Reims.

DUCEL, Y. et LANGUEREAU, H. « Un enseignement des probabilités en 1er cycle de la filière A.E.S. IREM de Franche-Comté.

GIRARD J.C. Modélisation, Simulation, et Expérience aléatoire. IREM de Lyon. In commission inter-IREM p. 245.

GRAS. R. (Décembre 1973) « À propos d'un problème de simulation » p. 794 bulletin APMEP N° 291.

JANVIER C. (1987) « Conceptions and Representations : The circle as an example », dans C. Janvier (Ed.), Problemms of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics, london, Lawrence Erlbaum Associates inc. Publishers.

NOËL Guy, (18 Septembre 1997) Du Procédural au Structural, U.M.H.

ROUAN, O., (novembre 1990), Conceptions probabilistes chez des élèves de 18-19 ans, mémoire de maîtrise à l'université du Québec – Montréal.

THIENARD J.C. (Octobre 1993) ; À propos de l'enseignement du calcul des probabilités, Université de Poitiers IREM.

Pour joindre l'auteur

Omar Bouteglifine
Président de l'ARPEM (Association de Recherche sur la Pédagogie et l'Enseignement des Mathématiques)
Directeur de CREMA (Centre de Recherche sur l'Enseignement de Mathématiques)
Délégation du Ministère de l'Education Nationale
26 Rue des Nations Unies
80000 Agadir
Maroc
Courriel : bouteglifine@gmail.com
Site web : http://bouteglifine.ifrance.com